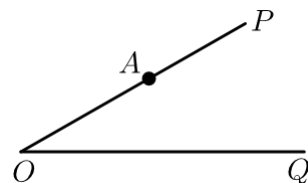


第1讲等腰三角形（加油站）

一、两圆一线

1. 如图， $\angle POQ = 30^\circ$ ，点 A 在 OP 边上，且 $OA = 6$ ，试在 OQ 边上确定一点 B ，使得 $\triangle AOB$ 是等腰三角形，则满足条件的点 B 的个数为（ ）。



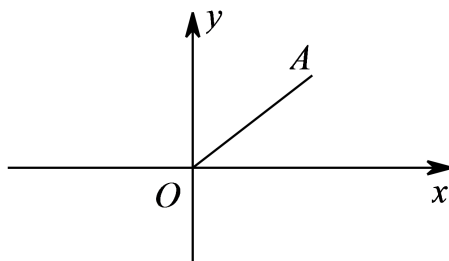
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【解析】①画 OA 的垂直平分线交 OQ 于一点；
②以 A 为圆心， OA 长为半径画弧交 OQ 于一点；
③以 O 为圆心， OA 长为半径画弧交 OQ 于一点。
这3个点都可以满足题意。
故选C。

【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

2. 如图，在平面直角坐标系中，点 A 在第一象限，点 P 在 x 轴上，若以 P, O, A 为顶点的三角形是等腰三角形，则满足条件的点 P 共有（ ）。

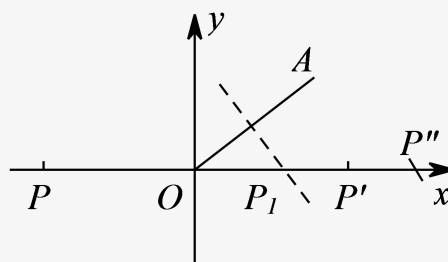


- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

【答案】C

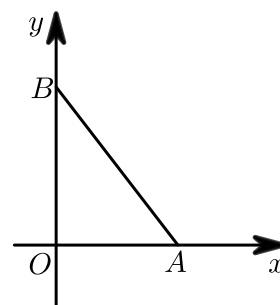
【解析】以 O 为圆心，以 OA 为半径画弧交 x 轴于点 P 和 P' ，此时三角形是等腰三角形，即2个，

以 A 为圆心，以 OA 为半径画弧交 x 轴于点 P''
 (除外)，此时三角形是等腰三角形，即1个，
 作 OA 的垂直平分线交 x 轴于一点 P_1 ，
 则 $AP = OP$ ，
 此时三角形是等腰三角形，即1个。
 $2 + 1 + 1 = 4$ 。



【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

3. 如图，平面直角坐标系中，已知定点 $A(3,0)$ 和 $B(0,4)$ ，若动点 C 在 y 轴上运动，则使 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的点 C 有()个。



A. 3

B. 4

C. 5

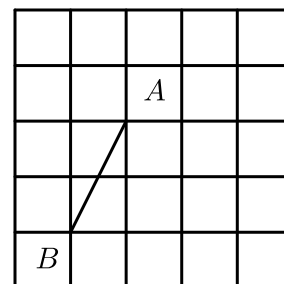
D. 6

【答案】B

【解析】以 A 为顶点的等腰三角形有一个，以 B 为顶点的等腰三角形有2个，以 C 为顶点的等腰三角形有1个，一共有4个等腰三角形。
 故选B。

【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

4. 如图的方格纸中，每一个小方格都是边长为1的正方形，找出格点 C ，使 $\triangle ABC$ 成为等腰三角形，这样的格点 C 的个数有()。



A. 8个

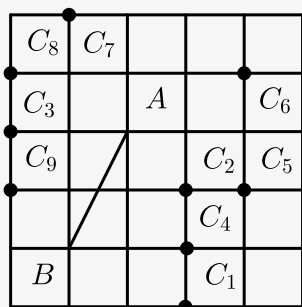
B. 9个

C. 10个

D. 11个

【答案】 B

【解析】 如图所示：



① $AC = BC$ ，符合点 C 的有 0 个，

② $AB = BC$ ，符合点 C 的有 C_1 、 C_2 、 C_3 共 3 个

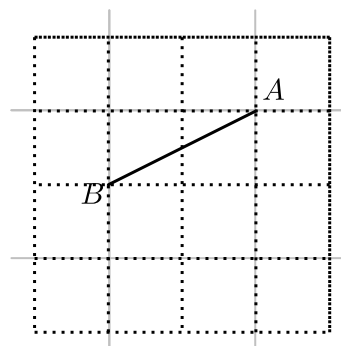
③ $AC = AB$ ，符合点 C 的有 C_4 、 C_5 、 C_6 、 C_7 、 C_8 、 C_9 共 6 个。

综上所述，所有符合条件的点 C 共有 9 个。

故选 B。

【标注】 【知识点】 等腰三角形的存在性

5. 在如图所示的正方形网格中，网格线的交点称为格点，已知 A ， B 是网格上两个格点，如果点 C 也是图中的格点，那么使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的格点 C 有 () 个。



A. 7

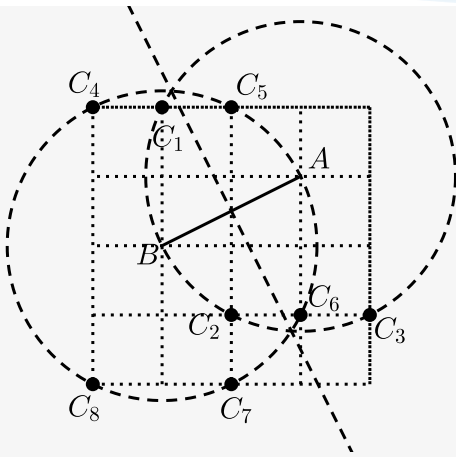
B. 8

C. 9

D. 10

【答案】 B

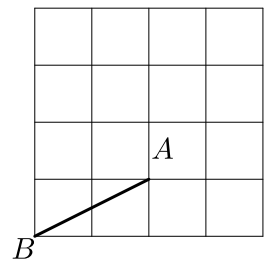
【解析】 如图所示，



以A为圆心， AB 为半径画圆，则 $AB = AC$ ，这样的C点有3个；
 以B为圆心， AB 为半径画圆，则 $AB = BC$ ，这样的C点有5个；
 不存在 $CA = CB$ 这样的C点，
 $\therefore$ 使得 $\triangle ABC$ 是等腰三角形的格点C—故选共有8个，
 故选B．

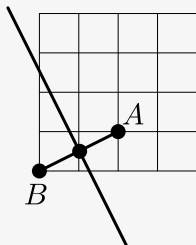
【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

6. 在方格纸上，每个小格的顶点叫格点．以格点为顶点的三角形叫格点三角形．如图，在 4×4 的方格纸上，以 AB 为一边的格点三角形 ABC 等腰三角形，则符合条件的C点共有 _____ 个．

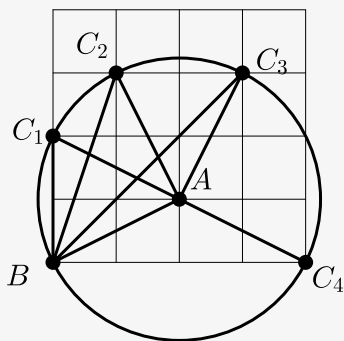


【答案】5

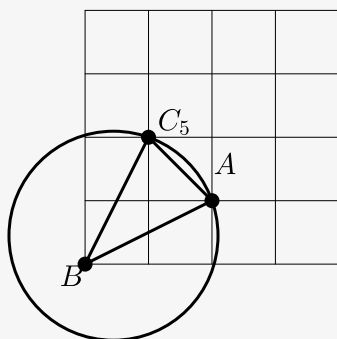
【解析】①作 AB 的垂直平分线，有0个；



②以A为圆心，以 AB 为半径作圆，有4个；



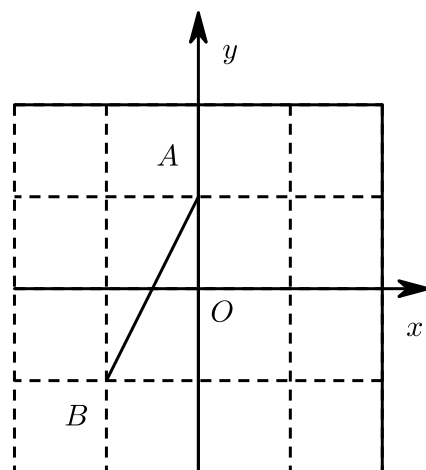
③以 B 为圆心，以 AB 为半径作圆，有1个．



所以共有5个．

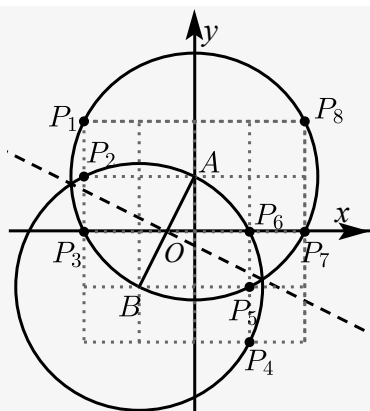
【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

7. 如图，在 4×4 的网格中存在线段 AB ，每格表示一个单位长度，并构建了平面直角坐标系．在现在的网格中（包括网格的边界）存在一点 P ，点 P 的横纵坐标都为整数，连接 PA 、 PB 后得到 $\triangle PAB$ 为等腰三角形，则满足条件的点 P 有 _____ 个．



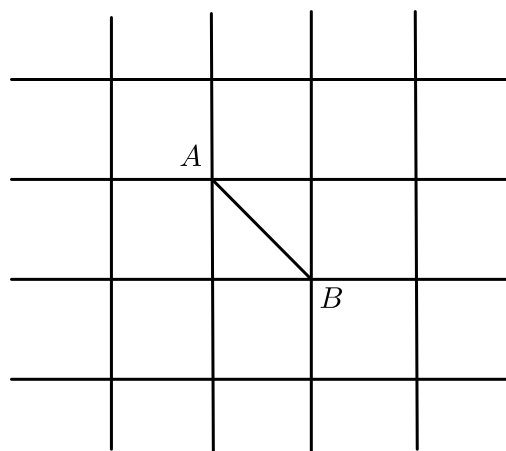
【答案】 8

【解析】



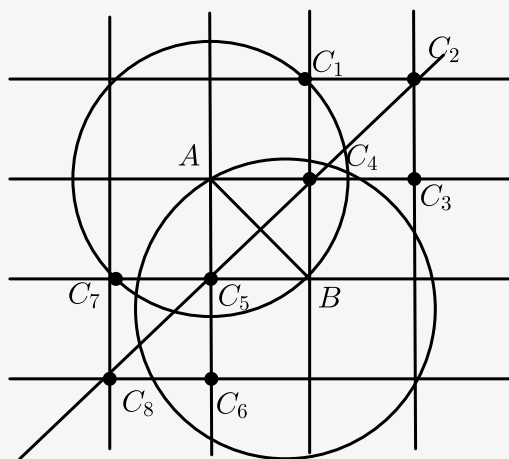
【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

8. 如图所示的正方形网格中，网格线的交点称为格点．已知 A 、 B 是两个格点，如果 C 也是图中的格点，且使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，则满足条件的点 C 有 _____ 个．



【答案】8

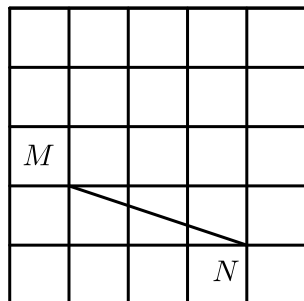
【解析】如图所示，共8个（两圆一垂）．



故答案为：8．

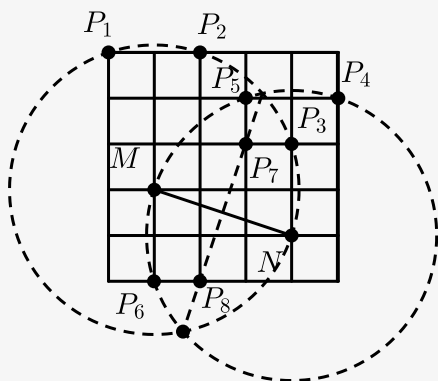
【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

9. 如图，在 5×5 的正方形网格中，每个小正方形的边长均为1，线段 MN 的端点在格点上，若画出以 MN 为边的等腰 $\triangle MNP$ ，使得点 P 在格点上，则点 P 的个数是 _____ 个．



【答案】8

【解析】

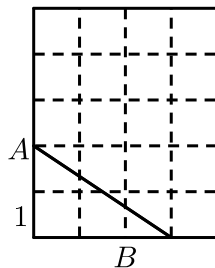


如图所示，当 MN 为腰时，以 M 、 N 为圆心，以 MN 长为半径画圆弧，交与格点处的点有 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 、 P_5 、 P_6 ，共6个点；当 MN 为底边时，作 MN 的垂直平分线（两圆交点的连线所在的直线），交与格点处的点有 P_7 、 P_8 ，共2个点．

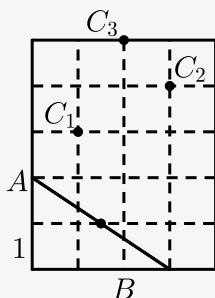
所以综上，满足条件的格点共有8个．

【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

10. 如图， A ， B 是 4×5 网格中的格点，网格中的每个小正方形的边长都是1．请在图中清晰地标出使以 A ， B ， C 为顶点的三角形是等腰三角形的所有格点 C 的位置．



【答案】



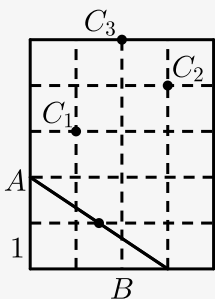
【解析】以A为圆心，AB长为半径画圆，圆弧经过格点 C_2 、 C_3 ；

以B为圆心，AB长为半径画圆，圆弧经过格点 C_1 ，

$$\therefore BC_1 = AC_2 = AC_3 = AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

$\therefore$ 因为AB的中点不在格点上，因此AB的垂直平分线不会经过格点

$\therefore C_1$ 、 C_2 、 C_3 是所要找的点。



【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

二、等边三角形

11. 等边三角形的判定：

(1) 下列推理错误的是 () .

- A. 因为 $\angle A = \angle B = \angle C$ ，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形
- B. 因为 $AB = AC$ ，且 $\angle B = \angle C$ ，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形
- C. 因为 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形

D. 因为 $AB = AC$, $\angle B = 60^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形

(2) 下面给出的五种三角形: ①所有外角都相等的三角形; ②三边都相等的三角形; ③有两个角是 60° 的三角形; ④有一个角是 60° 的三角形; ⑤以等边三角形三边中点为顶点的三角形, 其中等边三角形的个数是() .

A. 2个

B. 3个

C. 4个

D. 5个

【答案】(1) B

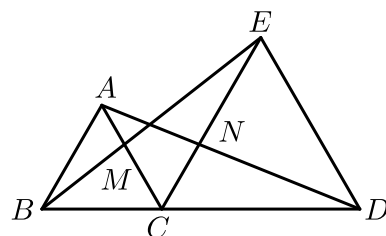
(2) C

【解析】(1) 略.

(2) 略.

【标注】【知识点】等边三角形的判定

12. 如图, B, C, D 在一条直线上, 且 $AB = BC = CA$, $CD = DE = EC$, 若 $CM = r$, 则 $CN = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 r

【解析】由条件知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 都是等边三角形.

在 $\triangle BCE$ 与 $\triangle ACD$ 中, $BC = AC$, $CE = CD$, $\angle BCE = \angle ACD = 120^\circ$.

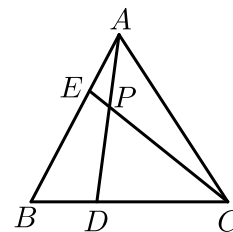
所以 $\triangle BCE \cong \triangle ACD$

于是, $\angle BEC = \angle ADC$, 从而 $\triangle CEM \cong \triangle CDN$,

所以 $CM = CN = r$.

【标注】【知识点】等边三角形的性质

13. 如图，等边 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别是 AB 、 BC 边上的一点，且 $AE = BD$ ，则 $\angle DPC =$ _____ .



【答案】 60°

【解析】 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD = 60^\circ, AC = BA.$$

$$\text{在} \triangle ACE \text{和} \triangle BAD \text{中}, \begin{cases} AC = BA \\ \angle CAE = \angle ABD, \\ AE = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BAD (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle DPC = \angle CAP + \angle ACP,$$

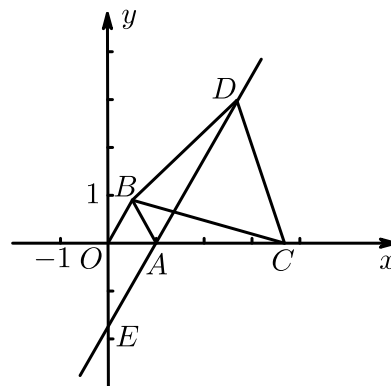
$$\angle BAD + \angle CAP = \angle ACP + \angle CAP = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DPC = 60^\circ.$$

【标注】【知识点】SAS

【知识点】等边三角形的性质

14. 在直角坐标系中， O 为坐标原点，点 A 坐标为 $(1, 0)$ ，以 OA 为边在第一象限内作等边 $\triangle OAB$ ，点 C 坐标为 $(4, 0)$ ，连接 BC ，以 BC 为边在第一象限内作等边 $\triangle BCD$ ，直线 DA 交 y 轴于 E 点．则 $\angle OAE =$ _____ $^\circ$.



【答案】 60

【解析】 由手拉手模型易证 $\triangle OBC \cong \triangle ABD$,

$$\therefore \angle BAD = \angle BOC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OAE = 60^\circ,$$

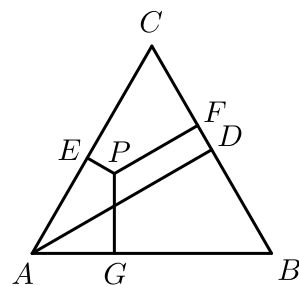
故答案为：60.

【标注】 【能力】 推理论证能力

【知识点】 全等三角形的对应边与角

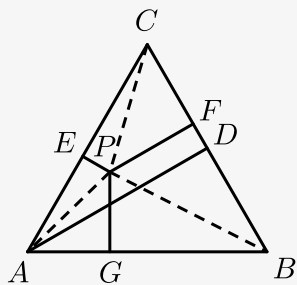
【知识点】 等边三角形的性质

15. 如图，点 P 为正三角形 ABC 内任意一点， $PE \perp AC$ 于点 E ， $PF \perp BC$ 于点 F ， $PG \perp AB$ 于点 G ， $AD \perp BC$ 于点 D ． PE 、 PF 、 PG 、 AD 之间存在怎样的数量关系？



【答案】 $PE + PF + PG = AD$.

【解析】 连接 CP 、 AP 、 BP ．



$$\therefore S_{\triangle APC} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle APB} = S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore \frac{1}{2}AC \cdot PE + \frac{1}{2}BC \cdot PF + \frac{1}{2}AB \cdot PG = \frac{1}{2}BC \cdot AD,$$

而 $AC = BC = AB$,

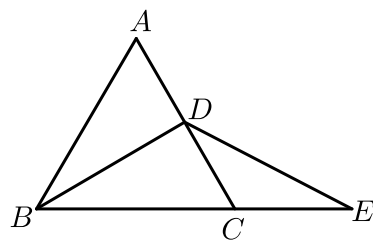
$$\therefore PE + PF + PG = AD.$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】等边三角形的性质

16. 已知：如图，在等边三角形 ABC 的 AC 边上取中点 D ， BC 的延长线上取一点 E ，使 $CE = CD$ 。

求证： $BD = DE$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】 $\because \triangle ABC$ 为等边三角形， BD 是 AC 边的中线，

$$\therefore BD \perp AC, BD \text{ 平分 } \angle ABC, \angle DBE = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ.$$

$$\because CD = CE,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle E.$$

$\because \angle ACB = 60^\circ$ ，且 $\angle ACB$ 为 $\triangle CDE$ 的外角，

$$\therefore \angle CDE + \angle E = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle CDE = \angle E = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle DEB = 30^\circ,$$

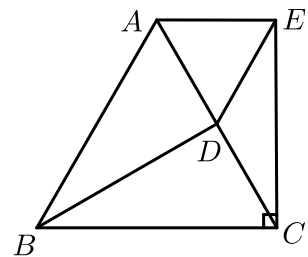
$$\therefore BD = DE.$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】等腰三角形的性质-三线合一

【知识点】等边三角形的性质

17. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形， D 是边 AC 的中点，连接 BD ， $EC \perp BC$ 于点 C ， $CE = BD$ 。
求证： $\triangle ADE$ 是等边三角形。



【答案】 证明见解析。

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形， D 为边 AC 的中点，

$\therefore BD \perp AC$ ，即 $\angle ADB = 90^\circ$ ，

$\because EC \perp BC$ ，

$\therefore \angle BCE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DBC + \angle DCB = 90^\circ$ ， $\angle ECD + \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACE = \angle DBC$ ，

$\therefore$ 在 $\triangle CBD$ 和 $\triangle ACE$ 中
$$\begin{cases} BD = CE \text{ (已知)} \\ \angle DBC = \angle ACE \text{ (已证)} \\ BC = AC \text{ (已证)} \end{cases}$$

$\therefore \triangle CBD \cong \triangle ACE$ (SAS)，

$\therefore CD = AE$ ， $\angle AEC = \angle BDC = 90^\circ$ ，

$\because D$ 为边 AC 的中点， $\angle AEC = 90^\circ$ ，

$\therefore AD = DE$ ，

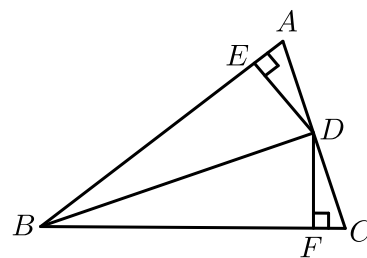
$\therefore AD = AE = DE$ ，

即 $\triangle ADE$ 是等边三角形。

【标注】 【思想】 转化与化归思想

【知识点】 等边三角形的性质

18. 已知：在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 为 AC 的中点， $DE \perp AB$ ， $DF \perp BC$ ，垂足分别为点 E ， F ，且 $DE = DF$ ．求证： $\triangle ABC$ 是等边三角形．



【答案】 证明见解析．

【解析】 $\because DE \perp AB$ ， $DF \perp BC$ ，垂足分别为点 E ， F ，

$$\therefore \angle AED = \angle CFD = 90^\circ,$$

$\because D$ 为 AC 的中点，

$$\therefore AD = DC,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 和 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} AD = DC \\ DE = DF \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle CDF,$$

$$\therefore \angle A = \angle C,$$

$$\therefore BA = BC,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore AB = BC = AC,$$

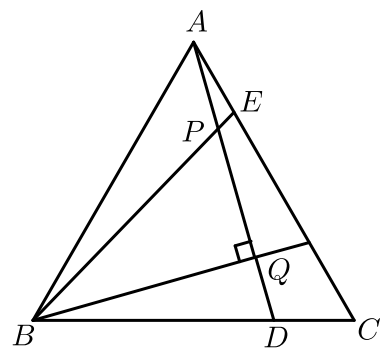
$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形．

【标注】【知识点】HL

【知识点】等边三角形的判定

【能力】推理论证能力

19. 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形， $AE = CD$ ， AD ， BE 相交于点 P ， $BQ \perp AD$ 于点 Q ， $PQ = 3$ ， $PE = 1$ ．



(1) 求证： $BE = AD$.

(2) 求 AD 的长 .

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 7 .

【解析】(1) $\because \triangle ABC$ 为等边三角形 ,

$$\therefore AB = AC = BC ,$$

$$\angle BAE = \angle ACD = 60^\circ ,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CAD$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = CA \\ \angle BAE = \angle ACD , \\ AE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAD (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore AD = BE .$$

(2) $\because \triangle ABE \cong \triangle CAD$,

$$\therefore \angle CAD = \angle ABE ,$$

$$\therefore \angle BPQ = \angle ABE + \angle BAD ,$$

$$= \angle BAD + \angle CAD ,$$

$$= \angle BAE = 60^\circ$$

$$\because BQ \perp AD ,$$

$$\therefore \angle AQB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle PBQ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ ,$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore PQ = 3, \\
 &\therefore \text{在 Rt}\triangle BPQ \text{ 中}, \\
 &BP = 2PQ = 6, \\
 &\text{又} \therefore PE = 1, \\
 &\therefore AD = BE = BP + PE = 6 + 1 = 7.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】SAS

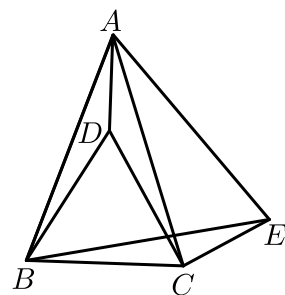
【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】30°特殊角的性质应用

【知识点】等边三角形的性质

【能力】推理论证能力

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 在 $\triangle ABC$ 内， $BD = BC$ ， $\angle DBC = 60^\circ$ ，点 E 在 $\triangle ABC$ 外， $\angle BCE = 150^\circ$ ， $\angle ABE = 60^\circ$ 。



- (1) 求 $\angle ADB$ 的度数。
- (2) 判断 $\triangle ABE$ 的形状并加以证明。
- (3) 连接 DE ，若 $DE \perp BD$ ， $DE = 8$ ，求 AD 的长。

【答案】(1) $\angle ADB = 150^\circ$ 。

(2) $\triangle ABE$ 是等边三角形，证明见解析。

(3) $AD = 4$ 。

【解析】(1) $\because BD = BC$ ， $\angle DBC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle DBC$ 是等边三角形，

$$\therefore DB = DC, \angle BDC = \angle DBC = \angle DCB = 60^\circ,$$

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ AD = AD, \\ DB = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle ADC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2}(360^\circ - 60^\circ) = 150^\circ.$$

(2) 结论: $\triangle ABE$ 是等边三角形.

$$\text{理由: } \because \angle ABE = \angle DBC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBE,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBC$ 中,

$$\begin{cases} AB = EB \\ \angle ADB = \angle BCE = 150^\circ, \\ \angle ABD = \angle EBC \end{cases}$$

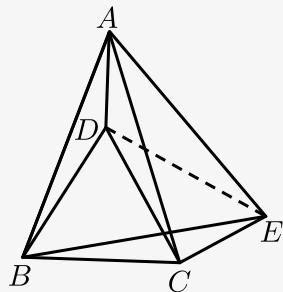
$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBC,$$

$$\therefore AB = BE,$$

$$\therefore \angle ABE = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形.

(3) 连接 DE ,



$$\because \angle BCE = 150^\circ, \angle DCB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\because \angle EDB = 90^\circ, \angle BDC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = 30^\circ,$$

$$\therefore EC = \frac{1}{2}DE = 4,$$

$$\because \triangle ABD \cong \triangle EBC,$$

$$\therefore AD = EC = 4.$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】等边三角形的判定

【知识点】等边三角形的性质